On désigne par $M_n(K)$ l'ensemble des matrices carrées $n \times n$ sur le corps commutatif K; on rappelle que deux matrices A et B de $M_n(K)$ sont semblables s'il existe une matrice inversible P de $M_n(K)$ telle que $B = P^{-1} A P$.

On note en colonne tout vecteur de $\mathbb{R}^n$.

PREMIERE PARTIE

Dans cette première partie, le corps de base K est le corps $\mathbb{R}$ des nombres réels.

1° Montrer que toute matrice 2×2 de trace nulle est semblable à une matrice 2×2 dont les deux éléments diagonaux sont nuls. En déduire un représentant de chaque classe d'équivalence de matrices semblables de trace nulle.

2° Donner, suivant la matrice diagonale D de $M_2(\mathbb{R})$, l'image de $M_2(\mathbb{R})$ par l'application $A \longmapsto D A - A D$, $A \in M_2(\mathbb{R})$.

3° Montrer que la matrice A de $M_2(\mathbb{R})$ est de trace nulle si et seulement si il existe deux matrices X et Y de $M_2(\mathbb{R})$ telles que $A = X Y - Y X$. Donner, pour la matrice $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix}$, un couple (X, Y) vérifiant la condition précédente.

4° Soit D une matrice diagonale de $M_n(\mathbb{R})$. Donner, suivant la matrice D, la dimension de l'image de $M_n(\mathbb{R})$ par l'application $A \longmapsto D A - A D$, $A \in M_n(\mathbb{R})$. Reconnaître cette image quand sa dimension est maximale et donner dans ce cas, en fonction de D, une base du noyau de l'application.

5° Soit E_n l'image de dimension maximale reconnue dans la question précédente. Montrer que toute matrice A carrée $n \times n$ de trace nulle est semblable à une matrice de E_n (on pourra commencer par montrer que A est semblable à une matrice $B = (b_{ij})$ telle que $b_{nn} = 0$ et raisonner par récurrence sur n). En déduire qu'une matrice A de $M_n(\mathbb{R})$ est de trace nulle si et seulement si il existe deux matrices X et Y de $M_n(\mathbb{R})$ telles que $A = X Y - Y X$. Peut-on imposer à X et Y d'être également de trace nulle?

DEUXIEME PARTIE

Dans cette deuxième partie, K est un corps commutatif quelconque. On note F_3 le sous-ensemble des matrices $A = (a_{ij})$ de $M_3(K)$ vérifiant $a_{13} = 0$ et $a_{12} + a_{23} = 0$.

1° Établir que si A de $M_3(K)$ est de rang 0, 1 ou 2, alors A est semblable à une matrice de F_3. Donner une matrice B de F_3, une matrice inversible P de $M_3(K)$ et son inverse P^{-1} telles que l'on ait :

$$\begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ 1 & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = P^{-1} B P \quad \text{avec } a \text{ et } b \text{ dans K, } a \text{ non nul.}$$

.../...

2° Soient A et B deux matrices semblables de $M_3(K)$ et k un scalaire de K. Montrer que $A + kI$ et $B + kI$ sont semblables (I désigne la matrice unité de $M_3(K)$). En déduire que si A admet une valeur propre dans K, alors A est semblable à une matrice de F_3.

3° On suppose que A de $M_3(K)$ [de rang 3] n'a pas de valeur propre dans K. Étudier l'indépendance linéaire des vecteurs x, Ax, A^2x pour x non nul dans K^3. Montrer que A est semblable à une matrice de F_3. Donner une matrice B de F_3 semblable à la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a \\ 1 & 0 & b \\ 0 & 1 & c \end{pmatrix}, \quad \text{avec } a, b, c \text{ dans K, } a \text{ non nul,}$$

en précisant les matrices P et P^{-1} qui vérifient $A = P^{-1} B P$.

4° Soit $S_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Reconnaître l'image de $M_3(K)$ par l'application $A \longmapsto S_3A - A S_3$, $A \in M_3(K)$. En déduire que toute matrice A de F_3 peut se mettre sous la forme $A = kE_{33} + S_3B - BS_3$, avec $B \in M_3(K)$, $E_{33} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $k \in K$. Retrouver, dans le cas des matrices 3×3, la condition nécessaire et suffisante de la première partie concernant la nullité de la trace.

TROISIEME PARTIE

Dans cette partie, K est un corps commutatif ayant au moins trois éléments. On pose :

F_n est l'ensemble des matrices $A = (a_{ij})$ vérifiant $a_{ij} = 0$ si $j \geqslant i + 2$, et $\sum_{i=1}^{n-1} a_{i,\,i+1} = 0$.

F'_n est l'ensemble des matrices $A = (a_{ij})$, vérifiant $\sum_{i=1}^{n-k} a_{i,\,i+k} = 0$ pour $k = 1, \ldots, n-1$.

G_n est l'ensemble des matrices $A = (a_{ij})$ vérifiant $a_{ij} = 0$ si $j \geqslant i + 2$.

1° Établir que toute matrice A de $M_n(K)$ est semblable à une matrice de G_n. Donner une matrice B de G_3 semblable à la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

en précisant les matrices P et P^{-1} vérifiant $A = P^{-1} B P$.

2° Montrer que pour $n \geqslant 3$, toute matrice A de G_n est semblable à une matrice de F_n (on pourra distinguer les cas où le nombre des $a_{i,\,i+1}$ non nuls est 0, 1, ou au moins 2). Donner une matrice B de F_4 semblable à la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

en indiquant encore les matrices P et P^{-1} telles que $A = P^{-1} B P$.

3° Soit S_n la matrice de $M_n(K)$ dont tous les éléments sont nuls sauf les $s_{i,\,i-1}$ qui valent 1 pour $i = 2, 3, \ldots, n$. Établir pour toute matrice A de F'_n l'existence d'une matrice B et d'un scalaire k tels que $A = k E_{nn} + S_nB - B S_n$, où

$$E_{nn} = \begin{pmatrix} & & 0 \\ & 0 & \vdots \\ & & 0 \\ 0 & \ldots & 0 \;\; 1 \end{pmatrix}$$

Retrouver la condition nécessaire et suffisante de la première partie concernant la nullité de la trace

4° Quelle propriété du corps des nombres réels a-t-on utilisée dans la première partie, et qui se révèle inutile pour établir la condition nécessaire et suffisante proposée?

FIN